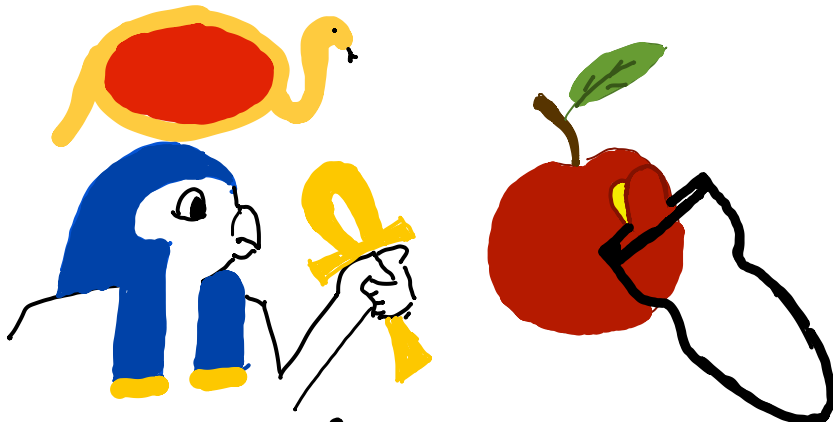


Infos: Retour sur l'évaluation des cours



Théorème de la divergence

$$\iint_{\Omega} \text{div} F(x, y) dx dy = \int_{\partial \Omega} \langle F; \nu \rangle dl$$

Si ν est connu: $\int_{\partial \Omega} \langle F; \nu \rangle dl = \int_a^b \langle F(\mu(t)); \nu_{\mu(t)} \rangle |\mu'(t)| dt$

Sinon $\int_{\partial \Omega} \langle F; \nu \rangle dl = \pm \int_a^b \langle F(\mu(t)); (\mu_2'(t), -\mu_1'(t)) \rangle dt$

On corrige le signe si μ laisse le domaine à droite ou $(\mu_2', -\mu_1')$ pointe vers l'intérieur

Corollaires du théorème de Green

Théorème de Green

$$\iint_{\Omega} \text{rot} F(x, y) dx dy = \int_{\partial \Omega} F \cdot dl$$

On corrige le signe si μ laisse Ω à droite

orienté positivement

$$\int_{\partial \Omega} F \cdot dl = \pm \int_a^b \langle F(\mu(t)); \mu'(t) \rangle dt$$

ν = normale
ext. unité

Corollaire 2.24 Formules d'aire.

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un domaine régulier, $F, G_1, G_2 \in C^\infty(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^2)$ défini par

$$F(x, y) = (-y, x), \quad G_1(x, y) = (0, x), \quad G_2(x, y) = (-y, 0)$$

$$\text{Aire}(\Omega) = \iint_{\Omega} 1 \, dx \, dy = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} F \cdot d\ell = \int_{\partial\Omega} G_1 \cdot d\ell = \int_{\partial\Omega} G_2 \cdot d\ell$$

$$\text{rot } F = 2, \quad \text{rot } G_1 = 1, \quad \text{rot } G_2 = 1 + \text{Green}.$$

Corollaire 2.25 Identités de Green dans $\mathbb{R}^2$.

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un domaine régulier, ν sa normale extérieure unitaire $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$. Alors,

$$(i) \iint_{\Omega} \Delta u(x, y) \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega} \langle \nabla u, \nu \rangle \, d\ell.$$

$$(ii) \iint_{\Omega} v(x, y) \cdot \Delta u(x, y) + \langle \nabla u(x, y), \nabla v(x, y) \rangle \\ = \int_{\partial\Omega} \langle v \cdot \nabla u; \nu \rangle \, d\ell$$

$$(iii) \iint_{\Omega} u(x,y) \Delta v(x,y) - v(x,y) \Delta u(x,y) \, dx dy = \int_{\partial \Omega} \langle u \nabla v - v \nabla u, \nu \rangle \, d\ell$$

$$\operatorname{div} (u \nabla v - v \nabla u) = u \Delta v - v \Delta u.$$

Chapitre 3 : Intégrales de surface, le théorème de la divergence dans $\mathbb{R}^3$ & théorème de Stokes

Notions 3.1

On se permettra d'écrire les composantes de nos champs vectoriels avec des indices en - haut.

$$g = (g^1, g^2, g^3, \dots, g^n)$$

On écrira pour $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad f_z = \frac{\partial f}{\partial z}$$

Définition 3.2 (Surface régulière)

$\Sigma_1 \subseteq \mathbb{R}^3$ est une surface régulière si

(i) $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un ouvert borné tq ∂A est une courbe régulière par morceaux simple fermée.

(ii) $\exists \sigma: \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $(u,v) \mapsto \sigma(u,v)$ tq

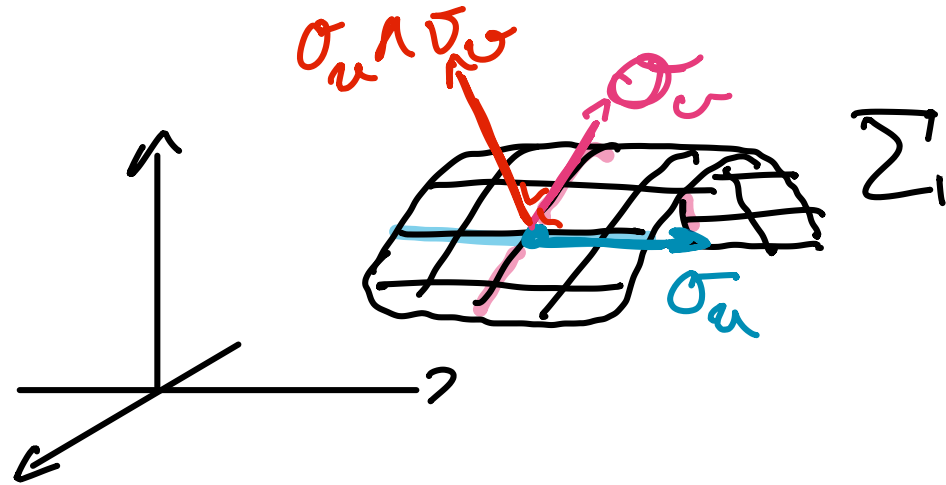
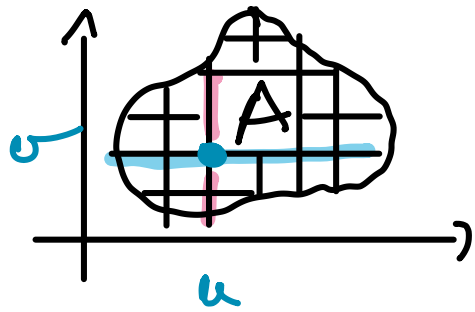
- $\sigma \in C^1(\bar{A}; \mathbb{R}^3)$
- $\sigma(\bar{A}) = \Sigma_1$
- σ est injective sur A

$$(iii) \sigma_u \wedge \sigma_v = (\sigma_u^1, \sigma_u^2, \sigma_u^3) \wedge (\sigma_v^1, \sigma_v^2, \sigma_v^3)$$

$$= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \sigma_u^1 & \sigma_u^2 & \sigma_u^3 \\ \sigma_v^1 & \sigma_v^2 & \sigma_v^3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_u^2 \sigma_v^3 - \sigma_v^2 \sigma_u^3 \\ \sigma_v^1 \sigma_u^3 - \sigma_u^1 \sigma_v^3 \\ \sigma_u^1 \sigma_v^2 - \sigma_v^1 \sigma_u^2 \end{pmatrix} \text{ est tq } |\sigma_u \wedge \sigma_v| \neq 0 \text{ sur } A.$$

σ est alors appelé une paramétrisation régulière de Σ et

$\frac{\sigma_u \wedge \sigma_v}{|\sigma_u \wedge \sigma_v|} = \mathcal{N}_{\sigma(u,v)}$ est une normale unitaire au point $\sigma(u,v)$



Σ est une surface régulière par morceaux si $\exists \Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_k$ des surfaces régulières tq $\Sigma = \bigcup_{i=1}^k \Sigma_i$

Exemples 3.3

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}, z \geq 0\}$$

Coordonnées pour Σ : cylindriques (on a le choix entre sphériques et cylindriques)

$$(x, y, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z), \quad r \geq 0, \theta \in [0, 2\pi], \quad z \in \mathbb{R}.$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \Leftrightarrow r^2 + z^2 = 1 \Leftrightarrow z = \pm \sqrt{1 - r^2} \Leftrightarrow z = \sqrt{1 - r^2} \quad \begin{matrix} z \geq 0 \\ r \geq 0 \end{matrix}$$

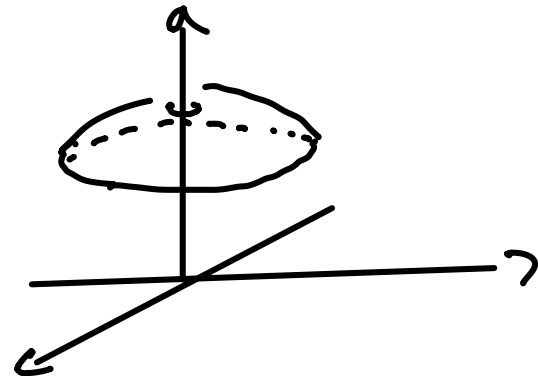
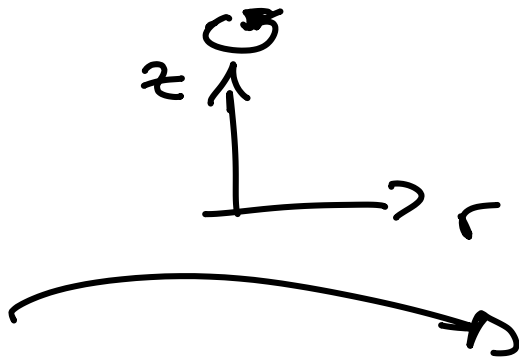
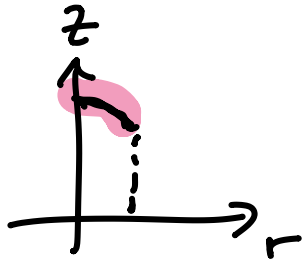
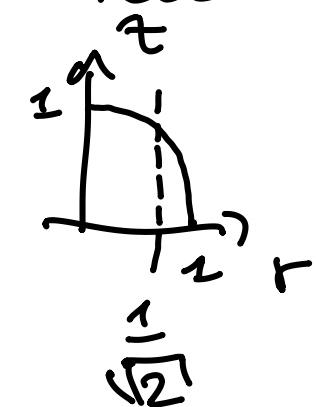
$$x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}, \Leftrightarrow r^2 \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow r \in [0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$$

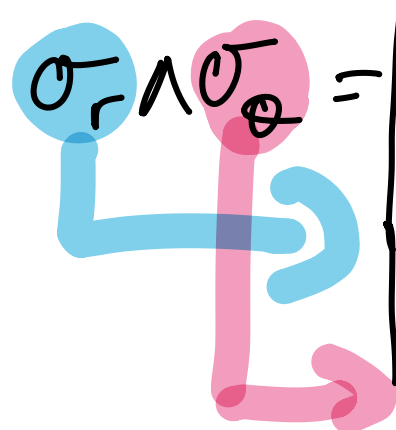
$$A =]0, \frac{1}{\sqrt{2}}[\times]0, 2\pi[\quad \leadsto \quad \bar{A} = [0, \frac{1}{\sqrt{2}}] \times [0, 2\pi]$$

$\begin{matrix} \nearrow & & \uparrow \\ r & & \theta \end{matrix}$

$$\sigma: \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \sigma(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, \sqrt{1 - r^2})$$

Dessin:





$$\sigma_r \wedge \sigma_\theta = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos\theta & \sin\theta & \frac{-r}{\sqrt{1-r^2}} \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}} \cos\theta \\ \frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}} \sin\theta \\ r \end{pmatrix}$$

$\neq 0$ sur $]0, \frac{1}{\sqrt{2}}[\times]0, 2\pi[$, est ok!

Définition 3.4 Surface orientable.

Une surface régulière $\Sigma_1 \subset \mathbb{R}^3$ est orientable si il existe un champ de vecteurs normaux unitaires continu

$$\vec{n} : \Sigma_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

La donnée d'un tel champ est appelé une orientation de Σ .

Remarque 3.5

Les problèmes avec la continuité de v peuvent apparaître aux "recollément", i.e. sur les parties ∂A où σ n'est pas injective. (souvent $\theta=0, \theta=2\pi$)

Définition 3.6 Intégrale de surface.

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un ouvert, $f \in C^0(\Omega)$, $\bar{f} \in C^0(\Omega; \mathbb{R}^3)$, $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ une surface régulière orientable, paramétrisée par $\sigma: \bar{A} \rightarrow \Sigma$
 $(u,v) \mapsto \sigma(u,v)$

L'intégrale de f sur Σ est définie par

$$\iint_{\Sigma} f \, ds = \iint_A f(\sigma(u,v)) \cdot |\sigma_u(u,v) \wedge \sigma_v(u,v)| \, du \, dv$$

L'intégrale de F sur Σ est définie par

$$\iint_{\Sigma} F \cdot ds = \iint_A \langle F(\sigma(u,v)); \sigma_u(u,v) \wedge \sigma_v(u,v) \rangle du dv$$

Si $\Sigma = \bigcup_{i=1}^k \Sigma_i$ est régulière par morceaux (avec Σ_i régulière)

$$\iint_{\Sigma} f ds = \sum_{i=1}^k \iint_{\Sigma_i} f ds \quad \& \quad \iint_{\Sigma} F \cdot ds = \sum_{i=1}^k \iint_{\Sigma_i} F \cdot ds$$

Remarque 3-7

(i) En comparant avec l'intégrale curviligne

$$\gamma(t) \longmapsto \sigma(u,v)$$

$$\gamma'(t) \longmapsto \sigma_u \wedge \sigma_v$$

(ii) L'intégrale de surface d'un champ scalaire ne dépend pas du choix de la paramétrisation.

Pour un champ vectoriel, $|\iint_{\Sigma} F \cdot ds|$ ne dépend pas de la paramétrisation, mais le signe de $\iint_{\Sigma} F \cdot ds$ dépend du choix d'orientation.

$$\left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \uparrow \\ \text{orientation} \end{array} \longleftrightarrow \frac{\sigma_u \wedge \sigma_v}{|\sigma_u \wedge \sigma_v|} \right)$$

$\uparrow$
choix de σ .

rappel : $a, b \in \mathbb{R}^3$, $a \wedge b = -b \wedge a$.

$\sigma(r, \theta) \rightsquigarrow \sigma_r \wedge \sigma_\theta$
 $\sigma(\theta, r) \rightsquigarrow \sigma_\theta \wedge \sigma_r$

signes opposés.

Exemple 3.8

(i) Soit $\Sigma_1 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4(x^2 + y^2) = (2-z)^2, 0 \leq z \leq 2, x \geq 0 \}$

$$f(x, y, z) = x \cdot y$$

Coordonnées pour Σ_1 : cylindriques

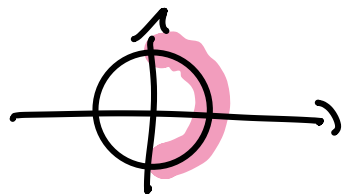
$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z, \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad r \geq 0, \quad z \in \mathbb{R}.$$

$$4(x^2 + y^2) = (2-z)^2 \Leftrightarrow 4r^2 = (2-z)^2 \quad z \leq 2$$

$$\stackrel{r \geq 0}{\Leftrightarrow} 2r = |2-z| = 2-z$$

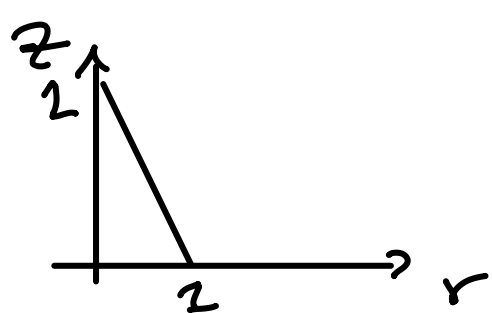
$$\Leftrightarrow r = 1 - \frac{z}{2}$$

$$x \geq 0, \quad r \cos \theta \geq 0$$

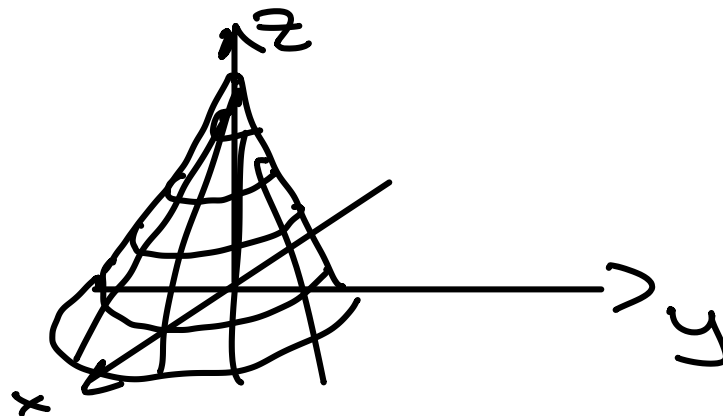
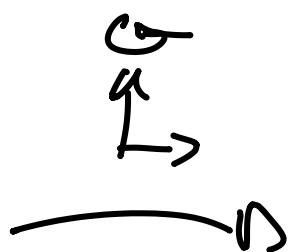


$$\rightarrow \theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[.$$

$$z \in]0, 2[$$



$$r = 1 - \frac{z}{2}$$



$$\sigma(\theta, z) = \left(\left(1 - \frac{z}{2}\right) \cos \theta, \left(1 - \frac{z}{2}\right) \sin \theta, z \right)$$

$$\sigma_\theta \wedge \sigma_z =$$

|